गणित प्रयोगशाला का उद्देश्य

एक गणित प्रयोगशाला गणित की विभिन्न शाखाओं जैसे बीजगणित, ज्यामिति, क्षेत्रमिति, त्रिकोणमिति, निर्देशांक ज्यामिति, साँख्यिकी तथा प्रायिकता इत्यादि में गणितीय जागरूकता, कौशल निर्माण, सकारात्मक दृष्टिकोण तथा स्वयं प्राप्त अनुभवों द्वारा अधिगम उत्साहित कर सकती है। यही वह स्थान है जहाँ विद्यार्थी मूर्त वस्तुओं का उपयोग करके कुछ अवधारणाएँ सीख सकते हैं तथा मॉडलों, मापनों और अन्य क्रियाकलापों द्वारा अनेक गणितीय तथ्यों और गुणों का सत्यापन कर सकते हैं। यह एक ऐसा अवसर भी प्रदान कर सकती है कि विद्यार्थी तालिकाओं, कैलकुलेटरों, इत्यादि का उपयोग करते हुए कुछ परिकलन करें तथा साथ ही एक कंप्यूटर पर स्वयं अपनी पसंद के कुछ ऑडियो-वीडियो कैसट, निदानात्मक अनुदेश, संवर्धक सामग्री, इत्यादि सुनें अथवा देखें। इस प्रकार, यह एक विद्यार्थी के लिए एक व्यक्तिगत अधिगम केंद्र के रूप में कार्य करेगी। यह खोजने, निदानात्मक अनुदेश, अवधारणाओं के प्रबलन तथा संवर्धन के लिए अवसर प्रदान करती है। गणित प्रयोगशाला शिक्षक को भी मूर्त सामग्रियों, मॉडलों, चार्टों इत्यादि का प्रयोग करते हुए, अनेक गणितीय अवधारणाओं, तथ्यों और गुणों को स्पष्ट और प्रदर्शित करने का अवसर प्रदान करेगी। शिक्षक प्रयोगशाला में थर्माकोल, कार्डबोर्ड इत्यादि जैसी सामग्रियों का प्रयोग करके विद्यार्थियों को इसी प्रकार के मॉडलों और चार्टों को तैयार करने के लिए प्रोत्साहित कर सकता है। प्रयोगशाला एक ऐसे मंच का भी कार्य कर सकती है, जहाँ शिक्षक कुछ समकालीन महत्वपूर्ण गणितीय मुद्दों और समस्याओं पर चर्चा और विचार-विमर्श कर सकते हैं। यह एक ऐसे स्थान का भी कार्य कर सकती है जहाँ शिक्षक और विद्यार्थी अनेक गणितीय आयोजन और मनोरंजक क्रियाकलाप कर सकते हैं। इस प्रकार, एक गणित प्रयोगशाला का उद्देश्य है कि-

- एक विद्यार्थी मूर्त वस्तुओं की सहायता से गणित सीखने तथा दैनिक जीवन से गणित के संबंध को प्रदर्शित करने में समर्थ हो जाए।
- एक विद्यार्थी मॉडलों, मापनों, कागज़ काटने, कागज़ मोड़ने, इत्यादि का उपयोग करके कुछ ज्यामितीय गुणों का सत्यापन अथवा उनकी खोज करने में समर्थ हो जाए।
- एक विद्यार्थी कुछ समस्याओं को हल करने में विभिन्न सारणियों (या तालिकाओं) और रेडी रेकोनरों (तैयार गणकों) का प्रयोग करने में समर्थ हो जाए।
- एक विद्यार्थी आलेखों को खींचने तथा कुछ परिकलन करने में कंप्यूटरों और कैलकुलटरों का प्रयोग करने में समर्थ हो जाए।
- प्रयोगशाला में रखे यंत्रों का प्रयोग करते हुए विद्यार्थी सर्वेक्षण, ऊँचाइयाँ ज्ञात करने, बैडमिंटन कोर्टों को बनाने, इत्यादि जैसे कुछ क्षेत्रीय कार्यों को करने में समर्थ हो जाएँ।

- विद्यार्थी और शिक्षक गणित क्लब क्रियाकलापों के आयोजन करने में समर्थ हो जाएँ, जिनमें प्रसिद्ध गणितज्ञों के जन्मदिवसों के आयोजन भी सम्मिलित हैं।
- विद्यार्थी विभिन्न गणितीय अवधारणाओं/विषयों से संबंधित कुछ ऑडियो या वीडियो कैसटों, सीडीयों को सुनने या देखने में समर्थ हो जाएँ।
- एक विद्यार्थी शिक्षक के उचित मार्गदर्शन के अंतर्गत निदानात्मक अनुदेश या संवर्धक सामग्री के भाग के रूप में एक कंप्यूटर पर एक विशेष कार्यक्रम देख सकने में समर्थ हो जाए।
- विद्यार्थी कुछ ऐसे प्रयोगों को करने में समर्थ हो जाएँ, जिन्हें शिक्षक द्वारा सरलता से मूल्यांकित किया जा सके।
- विद्यार्थी शिक्षक के उचित मार्गदर्शन के अंतर्गत कुछ परियोजनाएँ (प्रोजेक्ट) करने में समर्थ हो जाएँ।
- विद्यार्थी गणित में कुछ मनोरंजक क्रियाकलाप करने में समर्थ हो जाएँ।
- एक शिक्षक त्रिविमीय मॉडलों का उपयोग करते हुए, कुछ अमूर्त अवधारणाओं को चित्रीय रूप से स्पष्ट करने में समर्थ हो जाए।
- एक शिक्षक चार्टों और मॉडलों का प्रयोग करते हुए, कुछ अवधारणाओं और पैटर्नों (प्रतिरूपों) को प्रदर्शित करने में समर्थ हो जाए।
- एक शिक्षक विभिन्न मॉडलों का प्रयोग करते हुए, कुछ बीजीय सर्वसमिकाओं की सत्यता को प्रदर्शित और प्रबलित करने में समर्थ हो जाए।
- एक शिक्षक मॉडलों का प्रयोग करते हुए, विभिन्न समतल और ठोस आकृतियों के क्षेत्रफलों और आयतनों के विभिन्न सूत्रों की सत्यता प्रदर्शित करने में समर्थ हो जाए।
- एक शिक्षक कंप्यूटरों और कैलकुलेटरों का प्रयोग करते हुए, कुछ अवधारणाओं को स्पष्ट करने में समर्थ हो जाए।
- शिक्षक और विद्यार्थी प्रयोगशाला में रखी/रखे अच्छी संदर्भ गणित पुस्तकों, जरनलों, इत्यादि का अध्ययन करने से समर्थ हो जाएँ।
- शिक्षक समय-समय पर गणित से संबंधित महत्वपूर्ण मुद्दों पर बैठक करने और चर्चा करने में समर्थ हो जाएँ।
- एक शिक्षक स्लाइडों का प्रयोग करते हुए, कुछ अवधारणाओं, आँकड़ों, आलेखों, इत्यादि को स्पष्ट करने में समर्थ हो जाए।
- एक शिक्षक विद्यार्थियों की उपलब्धियों की जाँच करने के लिए, कंप्यूटर का प्रयोग करते हुए, समांतर (अर्थात् एक जैसे) टेस्टों के विभिन्न सेट जनित करने में समर्थ हो जाए।
- भविष्य के गणितज्ञ महान गणितज्ञों से संबंधित जीवनियों, कार्यों तथा वृत्तांतों (संक्षिप्त कहानियों) से प्रेरणा लेने में समर्थ हो जाएँ।

शिक्षण-अधिगम में गणित प्रयोगशाला की भूमिका

सेकण्डरी स्तर तक गणित एक अनिवार्य विषय है। गुणवत्ता वाली गणित शिक्षा प्राप्त करने का अधिकार प्रत्येक बच्चे का है। गणित परिशुद्ध संबंधों को स्थापित करने, संरचनाएँ देखने, विभिन्न बातों के लिए तर्क देने, कथनों की सत्यता या असत्यता को ज्ञात करने में अमूर्तों का उपयोग करने के लिए बच्चों को आकर्षित करती है (*एन.सी.एफ.*-2005)। इसलिए, स्कूलों में गणित का शिक्षण इस प्रकार आयोजित किया जाना चाहिए कि वे न केवल शैक्षिक क्षेत्रों की समस्याओं को खोजने और उनके हल प्राप्त करने में दक्षता सृजित कर लें अपितु वे दैनिक जीवन की समस्याओं के लिए भी ऐसी ही दक्षता सृजित कर लें। ऐसा करने के लिए, प्रयोगशाला तक की पहुँच एक अति महत्वपूर्ण आवश्यकता है, जो हमारी व्यवस्था (या पद्धति) अभी तक प्रदान नहीं कर पाई है। इस रिक्तता को भरने के लिए, सभी स्कूलों में सेकण्डरी स्तर पर एक गणित प्रयोगशाला प्रदान करने की योजना का प्रस्ताव है। जहाँ तक गणित के शिक्षण-अधिगम का संबंध है, यह सुविधा हमारे स्कूलों में एक नई शक्ति का संचार करेगी।

क्रियाकलाप-आधारित अधिगम, प्रेक्षणों को बनाने, आँकड़ों का संग्रह, वर्गीकरण, विश्लेषण, परिकल्पनाएँ निर्मित करना, व्याख्या करना तथा उद्देश्यात्मक सत्य को स्थापित करने के लिए निष्कर्ष तक पहुँचने जैसी प्रक्रियाओं पर लक्षित बल देकर गणित के शिक्षण - अधिगम को अभिलक्षणित बनाने की आवश्यकता है।

गणितीय शिक्षा का मुख्य लक्ष्य 'गणितीय रूप से सोचने और कारण देने के लिए, कल्पनाओं को उनके तार्किक निष्कर्ष तक पहुँचाने और अमूर्तों को संभालने के लिए' बच्चे के संसाधनों को विकसित करना है (*एन.सी.एफ.*-2005)। इसे उपलब्ध (या प्राप्त) करने के लिए, शिक्षण - अधिगम स्थितियों में, विविध प्रकार की विधियों और कौशलों का अनुपालन करना पड़ा है। विद्यालयी शिक्षा के प्रथम आठ वर्षों में प्रस्तुत किए गए अंकगणितीय कौशल सेकण्डरी स्तर पर चित्रित किए (सोचे) गए उच्चतर लक्ष्यों को उपलब्ध (या प्राप्त) करने में अति सहायक होंगे। बच्चों को दैनिक जीवन की बृहत प्रकार की स्थितियों का सामना करने के लिए तैयार करने के लिए, समस्या हल करने तथा वैश्लेषिक कौशलों को प्राप्त करने (या ग्रहण करने) पर अधिक प्रभावशाली रूप से बल दिया जाना चाहिए। अनेक समस्या हल करने वाली स्थितियों में, अमूर्तीकरण, परिमाणीकरण (मात्रीकरण), तुल्यता, स्थिति-विश्लेषण, अनुमानों और सत्यापन करने के अभ्यास उपयोगी हैं (*एन.सी.एफ.*-2005)। सरोकार का एक अन्य क्षेत्र जिसे शिक्षकों को ध्यान में रखना होगा वह है गणित का विद्यालयी पाठ्यचर्या में अन्य विषय क्षेत्रों से पृथक एवं एकल समझे जाने वाला स्तर।

गणित शिक्षक के लिए सबसे बड़ी चुनौतियों में से एक यह है कि अपने विद्यार्थियों में रुचि उत्पन्न करना और उसे बनाए रखना। यह एक व्यापक धारणा है कि गणित में सब कुछ सूत्रों और यांत्रिक प्रक्रियाओं से संबंधित ही है। ऐसी परिस्थितियों के अंतर्गत, एक गणित प्रयोगशाला शिक्षकों को उनकी युक्तियों में परिवर्तन करने तथा स्कूलों में गणित को एक क्रियाकलाप निहित कार्यक्रम बनाने में सहायता करेगी।

खचाखच भरी कक्षा की स्थिति में, वास्तव में यह कठिन होता है कि सभी विद्यार्थियों को जटिल सैद्धांतिक अवधारणाएँ बहुत स्पष्ट रूप से समझा दी जाएँ। ऐसी भीड़-भाड़ और भयपूर्ण स्थिति के अंतर्गत क्रांतिक चिंतन की आदत तथा न्याय संगत तर्कण विकसित करने पर दुष्प्रभाव पड़ता है, जो गणित अधिगम में अति महत्वपूर्ण हैं। छोटी कक्षाओं में एक गणित कोना तथा सेकण्डरी स्तर पर उपयुक्त सयंत्रों से परिपूर्ण एक गणित प्रयोगशाला बच्चों को अमूर्त वस्तुओं को विशिष्ट आकृतियों, आकारों और पैटर्नों में स्थानांतरित करने में समर्थ बनाएगी, जिससे अमूर्तो के अधिक सरलता से चित्रीय निरूपण करने के अवसर प्राप्त होंगे। विषय में रुचि जागृत करने में, गणित प्रयोगशाला अनेक स्थानों पर एक वास्तविकता बन गई है तथा इसे गणित शिक्षण-अधिगम के लिए एक स्थापित युक्ति समझा जाता है। क्योंकि एक प्रायोगिक अभ्यास में सैद्धांतिक हल की तुलना में अधिक समय लगता है, इसलिए विद्यार्थी को अच्छी प्रकार से तथ्यों को समझने के लिए अतिरिक्त समय मिल जाता है, जिससे वह इसे अधिक समय तक याद रख सकता है। उन विद्यार्थियों के लिए, जिनकी गणित में सीमित अभिरुचि है, प्रायोगिक क्रियाकलाप परिश्रम, बोरियत (सुस्ती) और अभिन्नता दूर करने के साथ ही, उनमें सकारात्मक दृष्टिकोण उत्पन्न करने तथा ज्ञान की नई प्यास जागृत करने में सहायक हो सकते हैं।

प्रयोगशाला का प्रबंधन और रख-रखाव

इसमें कोई दूसरी राय नहीं है कि प्रभावी शिक्षण और अधिगम के लिए, 'स्वयं करके सीखना' अति महत्वपूर्ण है, क्योंकि इससे प्राप्त अनुभव बच्चे के मस्तिष्क में स्थाई रूप से घर कर जाते हैं। इसको खोजना कि गणित है क्या तथा सत्य पर पहुँचना स्वयं करने का आनंद, समझ, सकारात्मक दृष्टिकोण विकसित करना और गणित की अधिगम प्रक्रियाएँ प्रदान करता है तथा इन सभी के ऊपर सबसे बड़ी बात यह है कि सुविधा प्रदान करने वाले व्यक्ति के रूप में शिक्षक से बंधन (या आसक्ति) का अनुभव होना। ऐसा कहा जाता है कि "एक साधारण शिक्षक सत्य की शिक्षा देता है, परंतु एक अच्छा शिक्षक यह शिक्षा देता है कि सत्य पर किस प्रकार पहुँचा जाए।"

शिक्षक के मार्गदर्शन के अंतर्गत किए गए क्रियाकलापों के माध्यम से एक निष्कर्ष के रूप में सीखा गया सिद्धांत या सीखी गई अवधारणा अधिगम की अन्य सभी विधियों से श्रेष्ठ है तथा इस आधार पर निर्मित सिद्धांत भूले नहीं जा सकते। इसके विपरीत कक्षा में बताई गई कोई अवधारणा, जिसका बाद में प्रयोगशाला में सत्यापन कर लिया गया हो, न तो बच्चे को कोई बड़ा अनुभव प्रदान करती है और न ही उसमें कोई अच्छी बात जानने की उत्सुकता जागृत करती है तथा न ही किसी अर्थ में कोई उपलब्धि प्रदान करती है।

एक प्रयोगशाला पानी, बिजली, इत्यादि की सुविधाओं के साथ-साथ यंत्रों (औज़ारों), उपकरणों, संयंत्रों, मॉडलों से सुसज्जित होती है। इनमें से किसी भी एक सामग्री या सुविधा के उपलब्ध न होने पर, प्रयोगशाला में किसी भी प्रयोग या क्रियाकलाप के करने में बाधा आ सकती है। इसलिए, प्रयोगशाला का प्रबंधन अच्छी प्रकार से होना चाहिए तथा उसका रख-रखाव सुचारु रूप से होना चाहिए।

एक प्रयोगशाला का प्रबंधन और उसका रख-रखाव व्यक्तियों और आवश्यक सामग्री द्वारा होता है। इसलिए, किसी प्रयोगशाला के प्रबंधन और रख-रखाव को दो श्रेणियों, अर्थात् व्यक्तिगत प्रबंधन और रख-रखाव तथा सामग्री प्रबंधन और रख-रखाव में विभक्त किया जा सकता है।

(A) व्यक्तिगत प्रबंधन और रख-रखाव

जो व्यक्ति प्रयोगशालाओं का प्रबंधन और रख-रखाव करते हैं, सामान्यतः प्रयोगशाला सहायक और प्रयोगशाला अटेंडेंट (attendant) कहलाते हैं। इनको प्रयोगशाला कर्मी भी कहा जाता है। शैक्षिक कर्मी भी समय-समय पर, जब भी आवश्यकता हो, प्रयोगशाला के प्रबंधन और रख-रखाव में सहायता करते हैं।

व्यक्तिगत प्रबंधन और रख-रखाव में निम्नलिखित बातों का ध्यान रखा जाता है-

1. **सफ़ाई**

एक प्रयोगशाला सदैव ही स्वच्छ और साफ़ रहनी चाहिए। जब विद्यार्थी दिन में प्रयोग/क्रियाकलाप करते हैं, तो यह निश्चय ही गंदी हो जाती है तथा वस्तुएँ इधर-उधर बिखर जाती हैं। इसलिए, प्रयोगशाला कर्मी का यह कर्तव्य है कि जब दिन का कार्य समाप्त हो जाए, तो वे प्रयोगशाला की सफ़ाई कर दें तथा यदि वस्तुएँ इधर-उधर बिखरी पड़ी हैं, तो उनको उचित स्थानों पर रख दें।

2. **दिन के कार्य के लिए सामग्री की जाँच करना और उसे व्यवस्थित करना**

प्रयोगशाला कर्मी को यह पता होना चाहिए कि किसी विशेष दिन कौन से क्रियाकलाप कराए जाने हैं। उस दिन किए जाने वाले क्रियाकलापों के लिए आवश्यक सामग्री को एक दिन पहले व्यवस्थित कर लेना चाहिए।

इससे पहले कि कक्षा के विद्यार्थी कोई क्रियाकलाप करने आएँ या शिक्षक विद्यार्थियों को प्रदर्शन दिखाने के लिए लाए, सभी सामग्री और यंत्र मेज पर व्यवस्थित कर देने चाहिए।

3. पानी, बिजली, इत्यादि सुविधाओं की जाँच कर लेनी चाहिए तथा इन्हें प्रयोग करने के दौरान उपलब्ध कराया जाना चाहिए।

4. यह अच्छा रहता है कि यदि सामग्री और सयंत्रों की एक सूची प्रयोगशाला की दीवार पर चिपका दी जाए।

5. प्रयोगशाला में कार्य करते समय, अनेक सुरक्षा उपायों की आवश्यकता होती है। इन उपायों की एक सूची प्रयोगशाला की दीवार पर चिपकाई जा सकती है।

6. प्रयोगशाला कर्मियों को चुनते समय, विद्यालय के अधिकारियों (या प्रशासन) को यह देख लेना चाहिए कि इन व्यक्तियों की शिक्षा गणित पृष्ठभूमि के साथ हो।

7. नए चुने गए प्रयोगशाला कर्मियों के लिए स्कूल के गणित शिक्षकों या स्कूल के बाहर के कुछ संसाधन व्यक्तियों की सहायता से 7 या 10 दिन का एक प्रशिक्षण कार्यक्रम आयोजित किया जाना चाहिए।

8. प्रयोगशाला में एक प्रथम उपचार किट रखी जानी चाहिए।

(B) सामग्री का प्रबंधन और रख-रखाव

किसी प्रयोगशाला को सुचारु रूप से चलाने के लिए, विविध प्रकार की सामग्री की आवश्यकता होती है। परंतु सामग्री की मात्रा उस स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या पर निर्भर करती है।

किसी प्रयोगशाला में सामग्री के प्रबंधन और रख-रखाव के लिए, निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना चाहिए-

1. यंत्रों, उपकरणों, क्रियाकलापों तथा सामग्री की सूची गणित के पाठ्यक्रम में सम्मिलित प्रयोगों के अनुसार तैयार की जानी चाहिए।
2. सामग्री की गुणवत्ता की जाँच करने तथा दरों की तुलना करने के लिए, गणित शिक्षकों का एक समूह एजेन्सियों या दुकानों का भ्रमण कर सकता है। इससे अच्छी गुणवत्ता वाली सामग्री उपयुक्त दरों पर प्राप्त करने में सहायता मिल सकेगी।
3. प्रयोगशाला के लिए आवश्यक सामग्री को समय-समय पर जाँच करते रहना चाहिए। यदि कुछ सामग्री या अन्य उपभोग में आने वाली वस्तुएँ खत्म हो गई हैं, तो उनके मंगाने के लिए आर्डर दे दिया जाना चाहिए।
4. प्रयोगशाला कर्मी द्वारा यंत्रों, संयंत्रों और उपकरणों की नियमित रूप से जाँच करते रहना चाहिए। यदि किसी यत्रं/संयंत्र की मरम्मत की आवश्यकता हो, तो इसे तुरंत करा लेना चाहिए। यदि किसी कल-पुर्जे को बदलना हो, तो इसके लिए आर्डर दे देना चाहिए।
5. सभी यंत्रों, संयंत्रों, उपकरणों इत्यादि को प्रयोगशाला में किसी अल्मारी/कपबोर्ड में अथवा किसी पृथक स्टोर रूम में रखना चाहिए।

सेकण्डरी स्तर पर गणित प्रयोगशाला के लिए संयंत्र (वस्तुएँ)

क्योंकि विद्यार्थी शिक्षक के मार्गदर्शन के अंतर्गत अनेक मॉडल बनाने के क्रियाकलापों में व्यस्त रहेंगे, गणित प्रयोगशाला का सुचारु रूप से चलना इस बात पर निर्भर करेगा कि विविध वस्तुओं जैसे कि डोरियाँ और धागे, सेलोटेप, सफ़ेद कागज़, कार्डबोर्ड, हार्डबोर्ड, सुइयाँ और पिन , ड्राइंग पिन, सैंडपेपर, चिमटियाँ, स्क्रू-ड्राइवर्स (पेचकस), विभिन्न रंगों के रबर बैंड, गोंद लगे हुए कागज और लेबल (चेपियाँ), वर्गांकित कागज़, प्लाईवुड, कैंची, आरी, पेंट, टाँका लगाने के लिए सामग्री, रांगे का तार, स्टील का तार, रूई, ऊन, टिन और प्लास्टिक की शीटें (चादर), चिकना कागज़ (ग्लेज्ड पेपर), इत्यादि की आपूर्ति ठीक प्रकार से होती रहे। इनके अतिरिक्त शिक्षक द्वारा विद्यार्थियों के सम्मुख कुछ गणितीय अवधारणाओं, तथ्यों और गुणों को प्रदर्शित करने के लिए, एक अच्छी टिकाऊ सामग्री से बने हुए कुछ मॉडल, चार्ट, स्लाइड, इत्यादि भी यहाँ होने चाहिए। विभिन्न सारणियाँ (तालिकाएँ), रेडी-रेकोनर (लेमीनेटेड रूप में) भी यहाँ होने चाहिए ताकि विद्यार्थी इनका विभिन्न कार्यों में उपयोग कर सकें। साथ ही, कुछ ऐसे क्रियाकलापों को करने के लिए, जैसे कि मापना, खींचना, परिकलन करना, संदर्भ पुस्तकों को पढ़ना, इत्यादि, प्रयोगशाला में गणितीय यंत्र, कैलकुलेटर, कंप्यूटर, पुस्तकें, जरनल, गणितीय शब्दकोश जैसी वस्तुएँ भी होनी चाहिए। उपरोक्त को दृष्टिगत रखते हुए, प्रयोगशाला के लिए सुझावित यंत्रों/मॉडलों की सूची निम्नलिखित है-

संयंत्र

गणितीय यंत्र सेट (प्रदर्शन के लिए बड़ा ज्यामिति बॉक्स जिसमें लकड़ी से बने रूलर (पटरी), सेट-स्क्वायर, डिवाइडर, चाँदा और परकार हों), कुछ ज्यामिति बॉक्स, 100cm, 50cm और 30 cm वाले मीटर स्केल, नापने का फीता, विकर्ण स्केल, क्लिनोमीटर, कैलकुलेटर, संबंधित सॉफ्टवेयर सहित कंप्यूटर इत्यादि।

मॉडल

- संख्या रेखा
- जियोबोर्ड – आयताकार, वृत्ताकार तथा सममापी
- निम्नलिखित सर्वसमिकाओं को सत्यापित करने के लिए मॉडल-

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

(iv) $k(a + b + c) = ka + kb + kc$

(v) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

(vi) $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

(vii) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab\ (a + b)$

(viii) $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\ (a - b)$

- निम्नलिखित के मूर्त मॉडल:

  समबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज, विषमबाहु त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज, जैसे वर्ग, समांतर चतुर्भुज, पतंग, समचतुर्भुज, आयत इत्यादि, सम पंचभुज, सम षड्भुज, सम अष्टभुज, वृत्त, गोला (गोलक), अर्धगोला, घनाभ, घन, लंब वृत्तीय बेलन, शंकु, शंकु का छिन्नक, चतुष्फलक (टेट्राहैड्रन), हेक्साहैड्रन, सम ओक्टाहैड्रन, डोडिकाहेड्रन, आइकोसाहैड्रन।

  वृत्त का केंद्र ज्ञात करने के लिए मॉडल। निम्नलिखित अवधारणाओं/गुणों को स्पष्ट करने वाले मॉडल:

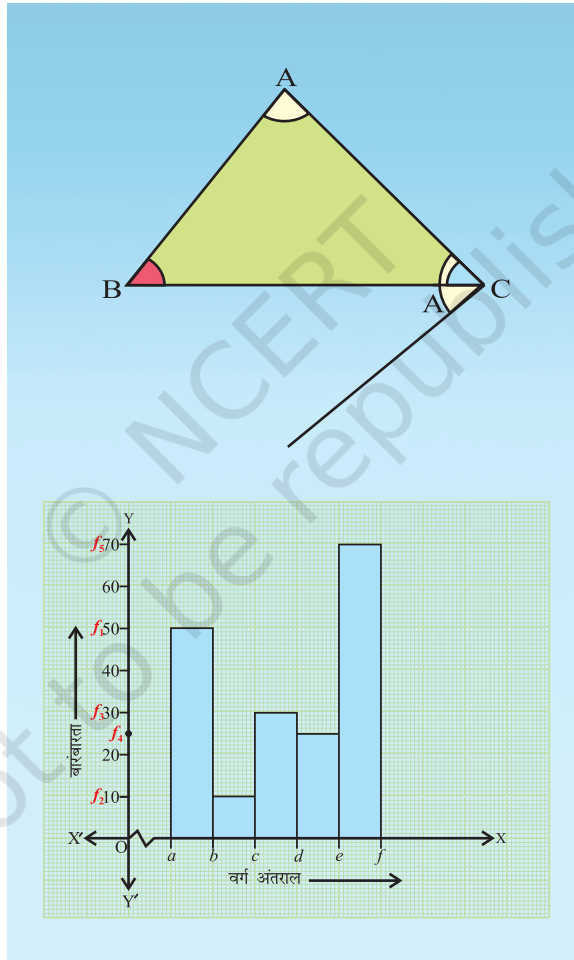
  शंकु की ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई, त्रिभुजों की सर्वांगसमता की विभिन्न कसौटियाँ (SSS, ASA, SAS, RHS), अर्धवृत्त में कोण, दीर्घ और लघु वृत्तखंड। विभिन्न विधियों द्वारा पाइथागोरस प्रमेय के सत्यापन के लिए मॉडल।
- वृत्त का क्षेत्रफल निगमित करने के लिए मॉडल, जिसमें वृत्त त्रिज्यखंडो में कटा है।
- वर्ग, आयत, समद्विबाहु त्रिभुज, समबाहु त्रिभुज और वृत्त की सममिति प्रदर्शित करने के लिए मॉडल, जिनमें कब्ज़े लगे हों।
- स्लाइडों सहित ओवरहेड प्रोजेक्टर (O.H.P.)
- गणित शिक्षण से संबंधित, विशेष रूप से चुने हुए विषयों पर सीडियाँ और फिल्म।
- कैलकुलेटर
- कंप्यूटर
- संदर्भ पुस्तकें और जरनल
- संक्षिप्त जीवन इतिहास तथा गणित में उनके योगदानों सहित गणितज्ञों के फ़ोटोग्राफ़

स्टेशनरी और विविध वस्तुएँ

विभिन्न रंगों के रबर बैंड, विभिन्न रंगों के कंचे, ताशों की एक गड्डी, आलेख कागज़/वर्गांकित कागज़, बिंदुकित कागज़, ड्राइंगपिन, रबड़, पेंसिल, स्कैच पेन, सेलोटेप, विभिन्न रंगों के धागें, चिकने कागज़ (ग्लेज्ड पेपर), पतंग का कागज़, ट्रेसिंग पेपर, गोंद, पिन, कैंची और कटर, हथौड़ा, आरी, थर्मोकोल की शीटें, सैंड पेपर, विभिन्न मापों की कीलें तथा स्क्रू(पेंच), स्क्रू ड्राइवर्स, कलपुर्जों के सेट सहित छेद करने वाली मशीन और चिमटियाँ।

The basic principles of learning mathematics are : (a) learning should be related to each child individually (b) the need for mathematics should develop from an intimate acquaintance with the environment (c) the child should be active and interested (d) concrete material and wide variety of illustrations are needed to aid the learning process (e) understanding should be encouraged at each stage of acquiring a particular skill (f) content should be broadly based with adequate appreciation of the links between the various branches of mathematics, (g) correct mathematical usage should be encouraged at all stages.

– Ronwill

कक्षा 9 के लिए क्रियाकलाप

Mathematics is one of the most important cultural components of every modern society. Its influence a other cultural element has been so fundamental and wide-spread as to warrant the statement that her "most modern" ways of life would hardly have been possibly without mathematics. Appeal to such obvious examples as electronics ratio, television, computing machines, and space travel. So substantiate this statement is unnecessary : the elementary art of calculating is evidence enough. Imagine trying to g et through three day without using numbers in some fashion or other!

– R.L. Wilder

क्रियाकलाप 1

उद्देश्य

एक वर्गमूल सर्पिल बनाना

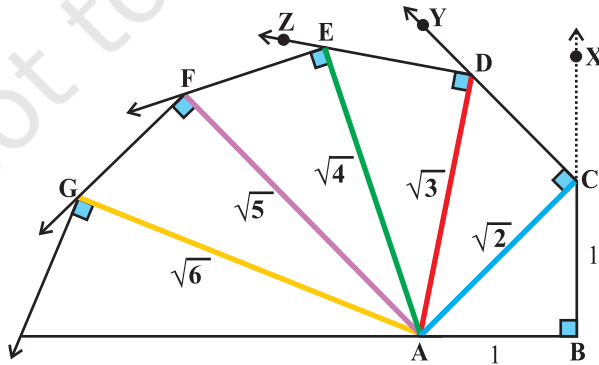
आवश्यक सामग्री

रंगीन धागे, चिपकाने वाला पदार्थ (गोंद), ड्राइंगपिन, कीलें, ज्यामिति बॉक्स, स्कैच पेन, मार्कर, प्लाईवुड का एक टुकड़ा।

रचना की विधि

1. एक 30 cm × 30 cm विमाओं वाला प्लाईवुड का टुकड़ा लीजिए।
2. 2 सेमी = 1 इकाई मानते हुए, एक इकाई लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए।
3. सेट स्क्वायर (या परकार) का प्रयोग करते हुए, AB पर लंब BX खींचिए।
4. BX से, BC=1 इकाई काटिए तथा AC को मिलाइए।
5. AC की लंबाई के बराबर एक नीले धागे और गोंद का प्रयोग करते हुए, इस धागे को AC के अनुदिश चिपकाइए ।
6. AC को आधार मानकर और सेट स्क्वायर (या परकार) का प्रयोग करते हुए, AC पर लंब CY खींचिए।
7. CY में से CD=1 इकाई काट लीजिए तथा AD को मिलाइए।

आकृति 1

14/04/18

8. AD की लंबाई के बराबर एक नारंगी धागे और गोंद का प्रयोग करते हुए, इस धागे को AD के अनुदिश चिपकाइए।

9. AD को आधार लेकर तथा सेट-स्क्वायर (या परकार) का प्रयोग करते हुए, AD पर DZ लंब खींचिए।

10. DZ में से DE=1 इकाई काटिए तथा AE को मिलाइए।

11. AE की लंबाई के बराबर एक हरे रंग के धागे को गोंद की सहायता से AE के अनुदिश चिपकाइए (देखिए आकृति 1)। इसी प्रक्रिया को पर्याप्त संख्या में बार-बार दोहराइए। यह एक वर्गमूल सर्पिल कहलाता है।

प्रदर्शन

1. आकृति से, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ अर्थात $AC = \sqrt{2}$ है।

   $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 2 + 1 = 3$ अर्थात् $AD = \sqrt{3}$ है।

2. इसी प्रकार, हम अन्य लंबाइयाँ AE, AF, AG, ... क्रमशः $\sqrt{4}$ या 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$,... के रूप में प्राप्त करते हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा-

AC = ..., AD = ..., AE = ..., AF = , AG = ...

$\sqrt{2}$ = AC = ... (लगभग)

$\sqrt{3}$ = AD = ... (लगभग)

$\sqrt{4}$ = AE = ... (लगभग)

$\sqrt{5}$ = AF = ... (लगभग)

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप के माध्यम से, हम अपरिमेय संख्याओं के अस्तित्व को स्पष्ट कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 2

उद्देश्य

संख्या रेखा पर कुछ अपरिमेय संख्याओं को निरूपित करना।

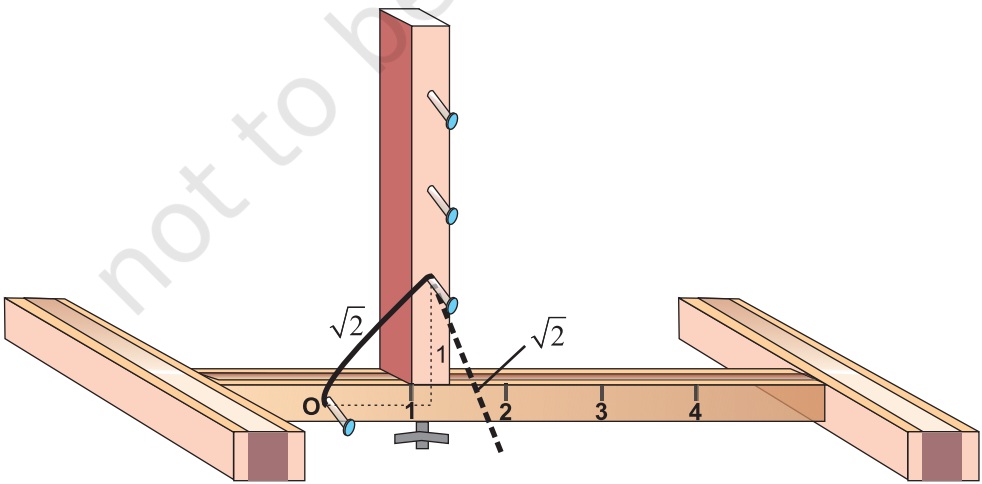
आवश्यक सामग्री

लकड़ी की दो घनाभाकार पट्टियाँ, धागे, कीलें, हथौड़ा, एक पैमाने (स्केल) की दो फोटो प्रतिलिपियाँ, ढिबरी सहित पेंच, गोंद, कटर।

रचना की विधि

1. लकड़ी की पट्टियों में से एक की ऊपरी सतह पर एक सीधी झिरी बनाइए। इसी पट्टी के लंबवत झिरी पर, दूसरी लकड़ी की पट्टी को इसकी निचली सतह पर एक पेंच की सहायता से लगाइए ताकि वह झिरी के अनुदिश स्वतंत्र रूप से चलायमान रह सके (देखिए आकृति 1)।
2. इन दोनों पट्टियों में से प्रत्येक पर स्केल की एक फोटो प्रतिलिपि चिपकाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।
3. दोनों पट्टियों पर, O से प्रारंभ करते हुए, एक-एक इकाई की दूरी पर आकृति में दर्शाए अनुसार कीलें लगाइए।
4. क्षैतिज पट्टी पर O पर लगी कील पर एक धागा बाँधिए।

आकृति 1

14/04/18

प्रदर्शन

1. क्षैतिज स्केल पर '1' इकाई लीजिए तथा निचली सतह पर एक पेंच की सहायता से 1 पर लांबिक लकड़ी की पट्टी लगाइए।
2. धागे के दूसरे सिरे को लांबिक पट्टी पर इकाई '1' से बाँधिए।
3. लांबिक पट्टी पर इकाई '1' से धागे को हटाइए तथा उसे क्षैतिज पट्टी पर रखिए, ताकि वह क्षैतिज पट्टी पर बिंदु P, $\sqrt{2}$ को निरूपित करे (देखिए आकृति 1)।

   इसी प्रकार, $\sqrt{3}$ को निरूपित करने के लिए, लांबिक लकड़ी की पट्टी को $\sqrt{2}$ पर लगाइए तथा ऊपर वाली प्रक्रिया को दोहराइए। $\sqrt{a}$, $a > 1$ को निरूपित करने के लिए, लांबिक स्केल (पट्टी) को $\sqrt{a-1}$ पर लगाइए तथा ऊपर की भाँति $\sqrt{a}$ प्राप्त करने के लिए आगे की प्रक्रिया कीजिए।

प्रेक्षण

$a - 1 =$ .... $\sqrt{a} =$ ....

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप कुछ अपरिमेय संख्याओं, जैसे कि $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... को संख्या रेखा पर निरूपित करने में सहायता कर सकता है।

टिप्पणी

आप लांबिक पट्टी को क्षैतिज पट्टी पर 3 पर रखकर तथा धागे के दूसरे सिरे को ऊर्ध्वाधर पट्टी पर 2 से बाँध कर भी $\sqrt{13}$ को ज्ञात कर सकते हैं। ऐसा कुछ इस प्रकार की अन्य संख्याओं के लिए भी किया जा सकता है

क्रियाकलाप 3

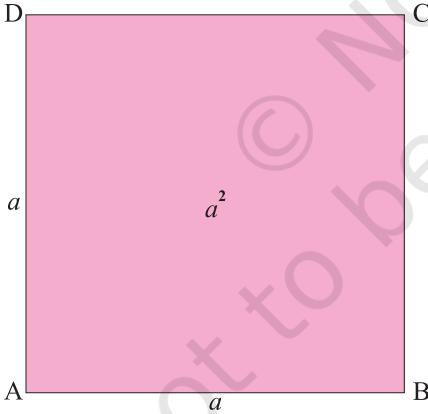
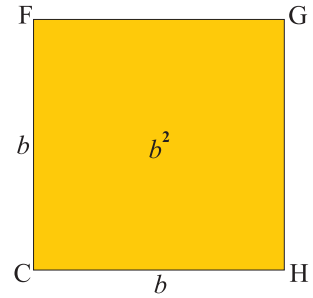
उद्देश्य

बीजीय सर्वसमिका
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
को सत्यापित करना।

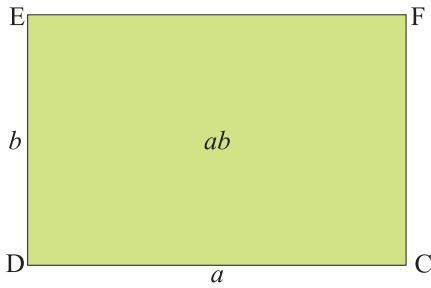
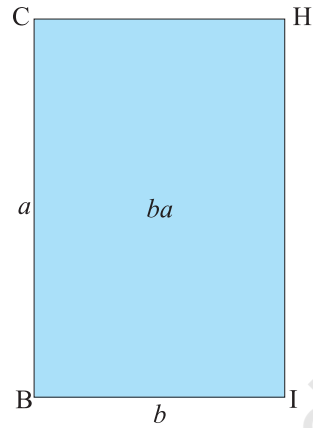
आवश्यक सामग्री

ड्रॉइंग शीट, कार्ड बोर्ड, सेलोटेप, रंगीन काग़ज़, कटर और पटरी (रूलर)।

रचना की विधि

1. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से a इकाई लंबाई की भुजा वाला एक वर्ग काटकर निकाल लीजिए और उसका नाम वर्ग ABCD रखिए (देखिए आकृति 1)।
2. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से b इकाई लंबाई की भुजा वाला एक वर्ग काटकर निकाल लीजिए और उसका नाम वर्ग CHGF रखिए (देखिए आकृति 1)।

आकृति 1

आकृति 2

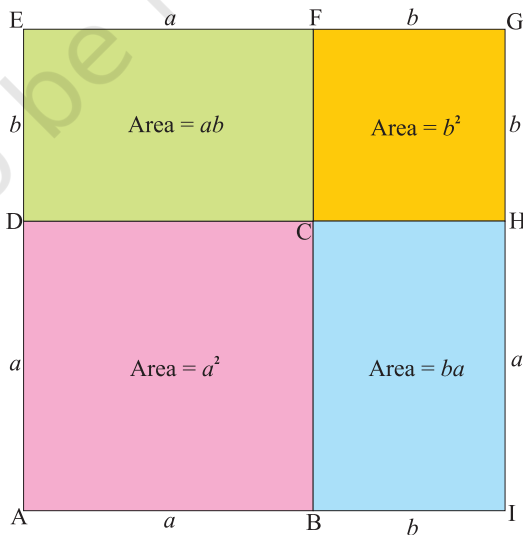
3. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से a इकाई लंबाई और b इकाई चौड़ाई वाला एक आयत काटकर निकाल लीजिए और उसका नाम आयत DCFE रखिए (देखिए आकृति 3)।

14/04/18

आकृति 3

आकृति 4

4. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से b इकाई लंबाई और a इकाई चौड़ाई वाला एक अन्य आयत काटकर निकाल लीजिए और उसका नाम आयत BIHC रखिए(देखिए आकृति 4)।

5. इन चारों कट-आउट आकृतियों का कुल क्षेत्रफल

= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल + वर्ग CHGF का क्षेत्रफल + आयत DCFE का क्षेत्रफल +आयत BIHC का क्षेत्रफल

$= a^2 + b^2 + ab + ba = a^2 + b^2 + 2ab$

आकृति 5

6. इन चारों चतुर्भुजों को सेलोटेप की सहायता से, आकृति 5 में दर्शाए अनुसार जोड़िए।

प्रदर्शन

स्पष्टतः AIGE भुजा $(a + b)$ का एक वर्ग है। अतः, इसका क्षेत्रफल $(a + b)^2$ है। घटक एककों का संयोजित क्षेत्रफल

$= a^2 + b^2 + ab + ab$

$= a^2 + b^2 + 2ab$

इस प्रकार, बीजीय सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सत्यापित हो जाती है। यहाँ क्षेत्रफल वर्ग इकाई में हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

	$a =$ ....,	$b =$ ....,	$(a+b) =$ ....,
अतः,	$a^2 =$ ....,	$b^2 =$ ....,	$ab =$ ....
	$(a+b)^2 =$ ....,		$2ab =$ ....

इसलिए, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ है।

इस सर्वसमिका का सत्यापन a और b के विभिन्न मान लेकर किया जाता है।

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग निम्नलिखित के लिए किया जा सकता है–

1. दो सुविधाजनक संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किसी संख्या का वर्ग परिकलित करना।
2. कुछ बीजीय व्यंजकों को सरल करना / के गुणनखंड करना।

क्रियाकलाप 4

उद्देश्य

बीजीय सर्वसमिका
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

ड्रॉइंग शीट, कार्ड बोर्ड, रंगीन काग़ज़, कैंची, रूलर और गोंद।

रचना की विधि

1. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से a इकाई की भुजा वाला एक वर्ग ABCD काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 1)।
2. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से b इकाई की भुजा वाला एक वर्ग EBHI काटकर निकाल लीजिए($b<a$) (देखिए आकृति 2)।
3. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से a इकाई लंबाई और b इकाई चौड़ाई का एक आयत GDCJ काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 3)।
4. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से a इकाई लंबाई और b इकाई चौड़ाई का एक आयत IFJH काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 4)।

आकृति 1 आकृति 2 आकृति 3 आकृति 4

5. इन कटआउटों को आकृति 5 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

आकृति 5

प्रदर्शन

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = a^2,

वर्ग EBHI का क्षेत्रफल = b^2

आयत GDCJ का क्षेत्रफल = ab,

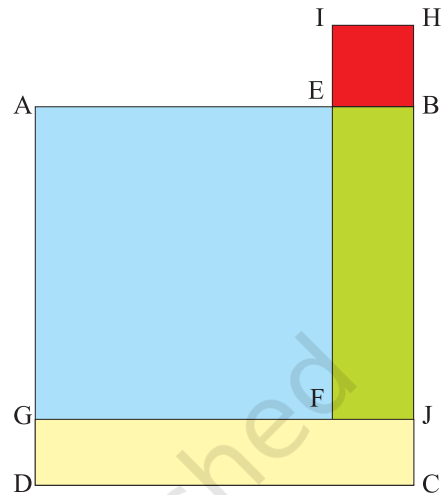
आयत IFJH का क्षेत्रफल = ab

आकृति 5 से, वर्ग AGFE का क्षेत्रफल = AG × GF = $(a - b)(a - b) = (a - b)^2$

अब, वर्ग AGFE का क्षेत्रफल = वर्ग ABCD का क्षेत्रफल + वर्ग EBHI का क्षेत्रफल – आयत IFJH का क्षेत्रफल – आयत GDCJ का क्षेत्रफल

$= a^2 + b^2 - ab - ab$

$= a^2 - 2ab + b^2$

यहाँ, क्षेत्रफल वर्ग इकाई में हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

a = ..., b = ...

अतः, $(a - b)$ = ..., a^2 = ..., b^2= ...., $(a - b)^2$ = ...,

ab = ..., $2ab$ = ...

इसलिए, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग निम्नलिखित के लिए किया जा सकता है–

1. दो सुविधाजनक संख्याओं के अंतर के रूप में व्यक्त किसी संख्या का वर्ग परिकलित करना।
2. कुछ बीजीय व्यंजकों को सरल करना/के गुणनखंड करना।

क्रियाकलाप 5

उद्देश्य

बीजीय सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

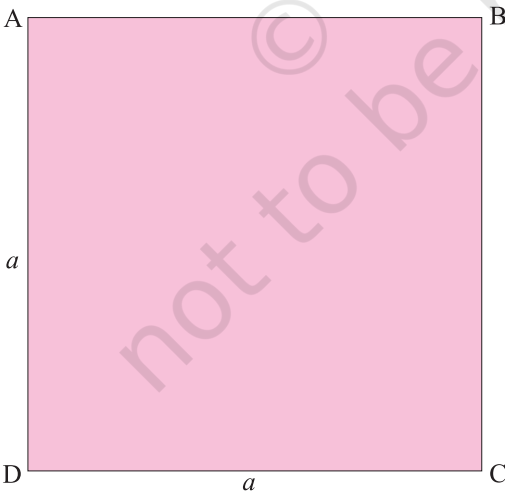
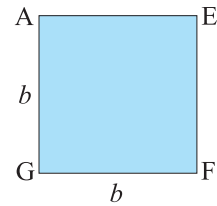
ड्रॉइंग शीट, कार्ड बोर्ड, रंगीन काग़ज़, कैंची, स्कैच पेन, रूलर, पारदर्शक शीट, गोंद।

रचना की विधि

1. एक सुविधाजनक साइज़ का एक कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक रंगीन काग़ज़ चिपकाइए।
2. एक ड्रॉइंग शीट में से भुजा a इकाई का एक वर्ग ABCD काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 1)।
3. एक अन्य ड्रॉइंग शीट में से, भुजा b $(b < a)$ इकाई का एक वर्ग AEFG काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 2)।
4. इन वर्गों को आकृति 3 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

आकृति 1

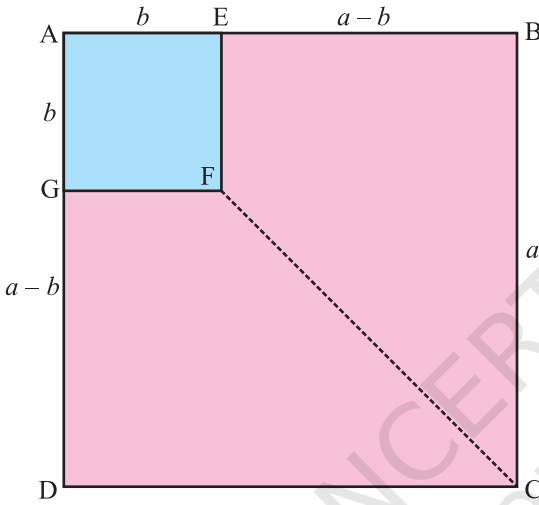
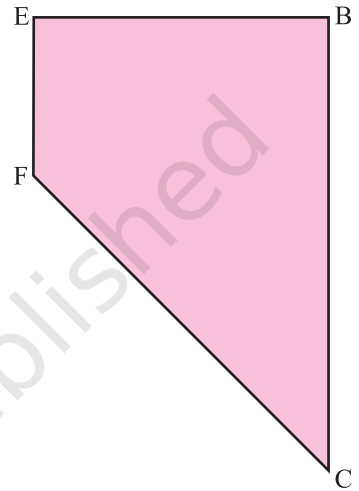
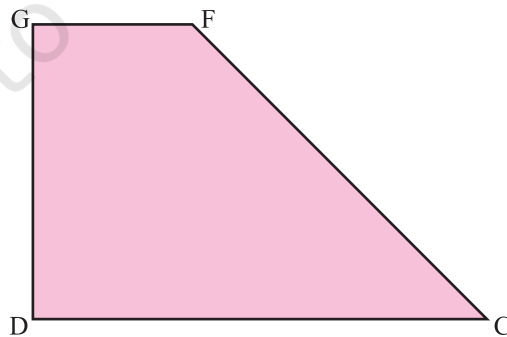
आकृति 2

14/04/18

5. स्कैच पेन की सहायता से, F को C से मिलाइए। एक पारदर्शक शीट की सहयता से EBCF और GFCD के सर्वांगसम समलंब काटकर निकाल लीजिए तथा इनके नाम क्रमश: EBCF और GFCD रखिए (देखिए आकृतियां 4 और 5)।

आकृति 3

आकृति 4

आकृति 5

14/04/18

6. इन समलंबों को आकृति 6 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

आकृति 6

प्रदर्शन

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= a^2$

वर्ग AEFG का क्षेत्रफल $= b^2$

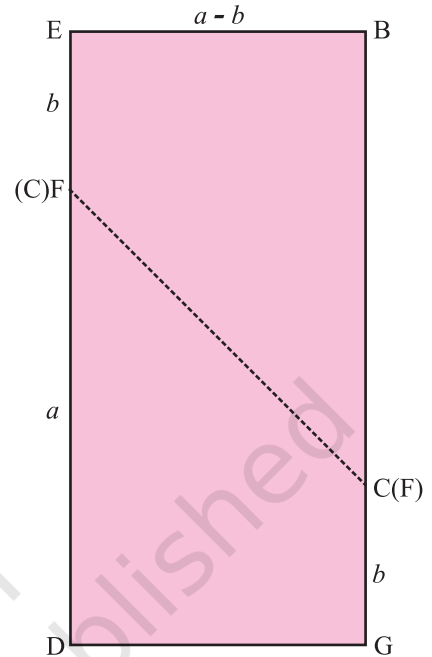
आकृति 3 में,

आयत ABCD का क्षेत्रफल – आयत AEFG का क्षेत्रफल = समलंब EBCF का क्षेत्रफल + समलंब GFCD का क्षेत्रफल

= आयत EBGD का क्षेत्रफल (आकृति 6)

= ED × DG

इस प्रकार, $a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$

यहाँ क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ....,

अत:, $(a+b) =$ ...., $a^2 =$ ...., $b^2 =$ ....,$(a-b) =$ ....,

$a^2-b^2 =$ ...., $(a+b)\ (a-b) =$ ....

इसलिए , $a^2-b^2 = (a+b)\ (a-b)$ है।

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग निम्नलिखित को ज्ञात करने में किया जा सकता है–

1. दो वर्गों का अंतर।
2. दो संख्याओं से संबद्ध कुछ गुणनफल।
3. बीजीय व्यंजकों का सरलीकरण और गुणनखंडन।

क्रियाकलाप 6

उद्देश्य

बीजीय सर्वसमिका
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

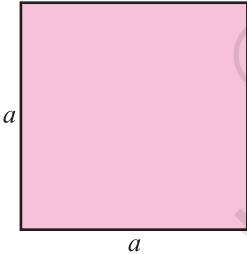
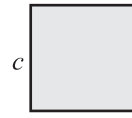
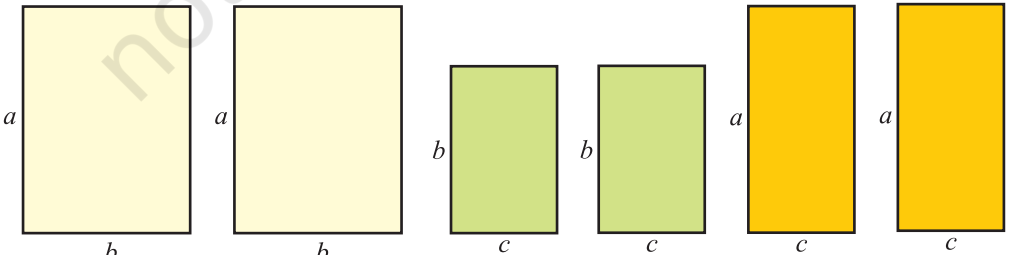
हार्ड बोर्ड,गोंद, रंगीन कागज़, सफ़ेद काग़ज़।

रचना की विधि

1. एक सुविधाजनक साइज़ का हार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद काग़ज़ चिपकाइए।
2. एक रंगीन काग़ज़ में से भुजा a इकाई का एक वर्ग काटकर निकाल लीजिए।
3. एक रंगीन काग़ज़ में से भुजा b इकाई का एक वर्ग काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 2)।
4. एक रंगीन काग़ज़ में से भुजा c इकाई का एक वर्ग काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 3)।
5. रंगीन काग़ज़ों में से ही दो आयत विमाओं $a \times b$ वाले, दो आयत विमाओं $b \times c$ वाले तथा दो आयत विमाओं $c \times a$ वाले काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 4)।

आकृति 1 आकृति 2 आकृति 3

आकृति 4

14/04/18

6. इन वर्गों और आयतों को आकृति 5 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

आकृति 5

प्रदर्शन

आकृति 5 में, वर्गों और आयतों को व्यवस्थित करने पर, एक वर्ग ABCD प्राप्त होता है, जिसकी भुजा की लंबाई $(a+b+c)$ है।

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= (a+b+c)^2$

अत:, $(a+b+c)^2$ = आकृति 1 से आकृति 4 तक में दर्शाए गए सभी वर्गों और आयतों के क्षेत्रफलों का योग

$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

यहाँ, क्षेत्रफल वर्ग इकाई में हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ...., $c =$ ....,

अत:, $a^2 =$ ...., $b^2 =$ ...., $c^2 =$ ...., $ab =$ ....,

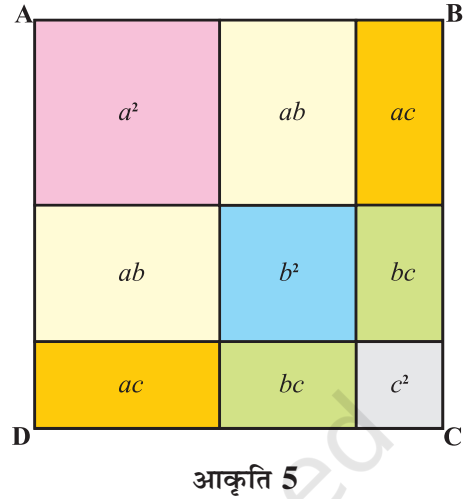
$bc =$ ...., $ca =$ ...., $2ab =$ ...., $2bc =$ ....,

$2ca =$ ...., $a+b+c =$ ...., $(a+b+c)^2 =$ ....

अत:, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का निम्नलिखित के लिए प्रयोग किया जा सकता है–

1. बीजीय व्यंजकों का सरलीकरण / गुणनखंडन।
2. तीन सुविधाजनक संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त संख्या का वर्ग ज्ञात करना।

क्रियाकलाप 7

उद्देश्य

बीजीय सर्वसमिका

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

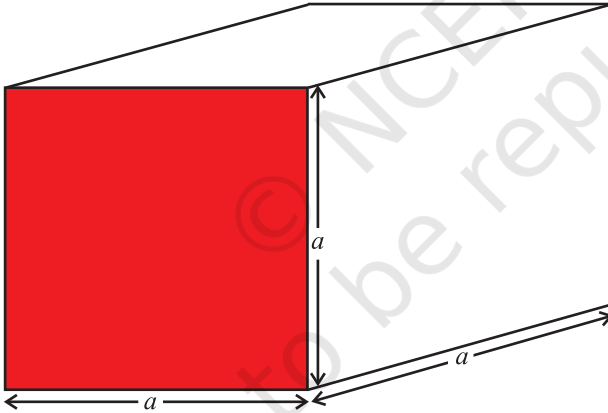
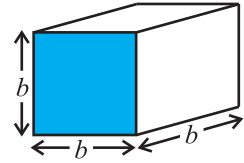
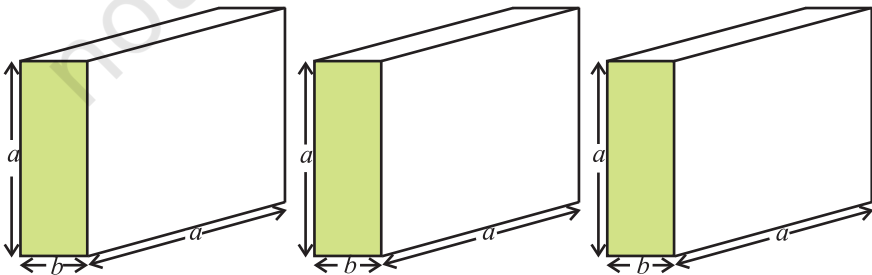
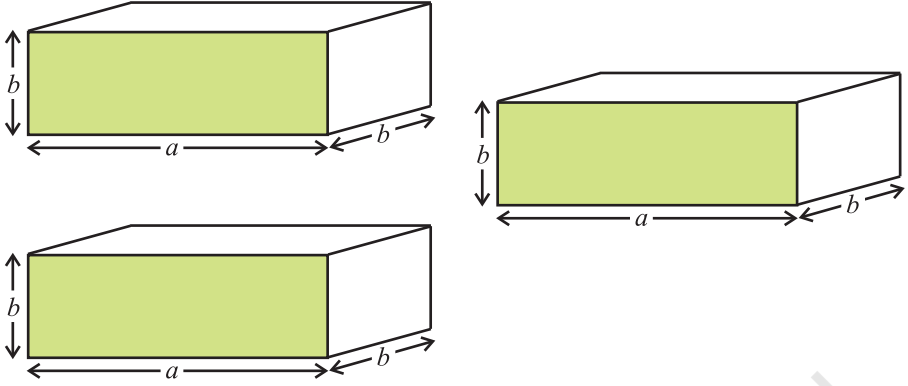
को सत्यापित करना।

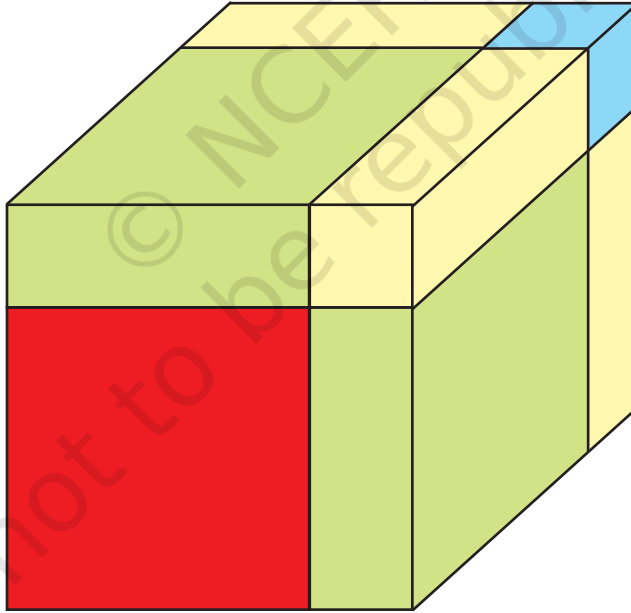
आवश्यक सामग्री

एक्रिलिक शीट, रंगीन काग़ज़, चिकना काग़ज़, आरी, स्कैच पेन, गोंद, सेलोटेप।

रचना की विधि

1. एक्रिलिक शीट और सेलोटेप गोंद का प्रयोग करते हुए, भुजा a इकाई का एक घन बनाइए तथा एक और घन भुजा b इकाई $(b < a)$ का बनाइए (देखिए आकृतियाँ 1 और 2)।

2. इसी प्रकार, तीन घनाभ विमाओं $a \times a \times b$ तथा तीन घनाभ विमाओं $a \times b \times b$ के बनाइए (देखिए आकृति 3 और आकृति 4)।

आकृति 1

आकृति 2

आकृति 3

आकृति 4

3. आकृति 5 में दर्शाए अनुसार, इन घन और घनाभों को व्यवस्थित कीजिए।

आकृति 5

प्रदर्शन

भुजा a वाले घन का आयतन $= a \times a \times a = a^3$,

भुजा b वाले घन का आयतन $= b \times b \times b = b^3$,

विमाओं $a \times a \times b$ वाले घनाभ का आयतन $= a^2b$, ऐसे तीन घनाभों का आयतन $= 3a^2b$ है।

विमाओं $a \times b \times b$ वाले घनाभ का आयतन$= ab^2$, ऐसे तीन घनाभों का आयतन $= 3ab^2$ है।

आकृति 5 में प्राप्त ठोस आकृति भुजा $(a + b)$ का एक घन है। इसका आयतन $= (a + b)^3$

अतः, $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

यहाँ आयतन घन इकाई में हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ....,

अतः, $a^3 =$ ...., $b^3 =$ ...., $a^2b =$ ....,

$3a^2b =$ ...., $ab^2 =$ ...., $3ab^2 =$ ...., $(a+b)^3 =$ ....,

अतः, $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग निम्नलिखित के लिए किया जा सकता है–

1. दो सुविधाजनक संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किसी संख्या का घन परिकलित करना।
2. बीजीय व्यंजकों का सरलीकरण और गुणनखंडन करना।

क्रियाकलाप 8

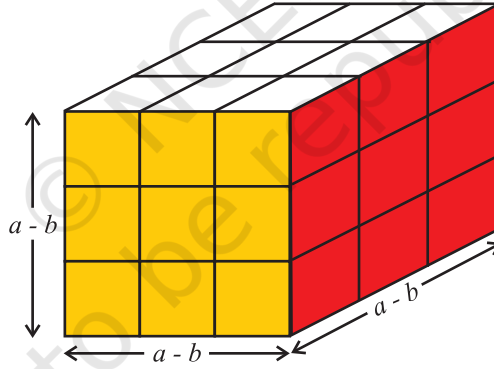
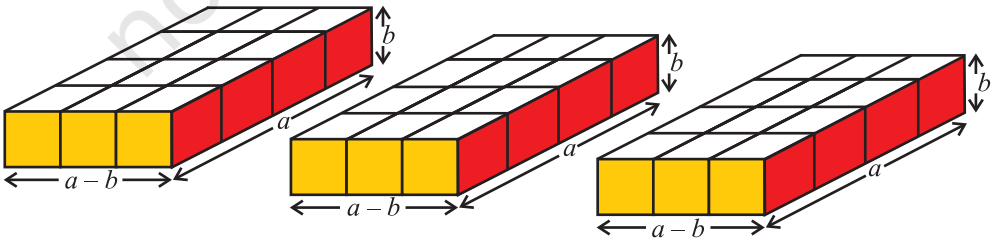
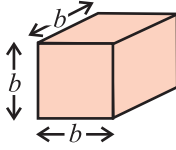
उद्देश्य

बीजीय सर्वसमिका $(a-b)^3=a^3-b^3-3(a-b)\ ab$ को सत्यापित करना।

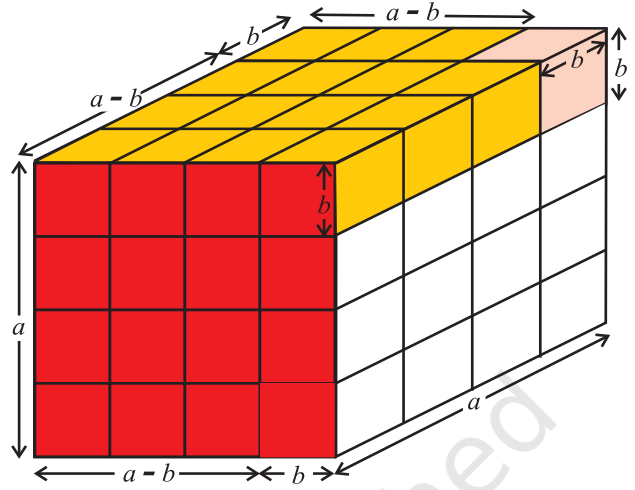
आवश्यक सामग्री

एक्रिलिक शीट, रंगीन काग़ज़, आरी, स्कैच पेन, गोंद, सेलोटेप।

रचना की विधि

1. एक्रिलिक शीट और सेलोटेप/गोंद का प्रयोग करते हुए, भुजा $(a-b)$ इकाई $(a > b)$ का एक घन बनाइए (देखिए आकृति 1)।
2. एक्रिलिक शीट और सेलोटेप/गोंद का प्रयोग करते हुए, विमाओं $(a-b) \times a \times b$ वाले तीन घनाभ बनाइए तथा भुजा b इकाई वाला एक घन बनाइए (देखिए आकृति 2 और आकृति 3)।
3. इन घनों और घनाभों को आकृति 4 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

आकृति 1

आकृति 2

आकृति 3

आकृति 4

प्रदर्शन

आकृति 1 में, भुजा $(a - b)$ इकाई वाले घन का आयतन = $(a - b)^3$

आकृति 2 में, एक घनाभ का आयतन = $(a-b)\ ab$

आकृति 2 में, तीनों घनाभों का आयतन = $3\ (a-b)\ ab$

आकृति 3 में, भुजा b इकाई वाले घन का आयतन = b^3

आकृति 4 में प्राप्त ठोस का आयतन

$$= (a-b)^3 + (a-b)\ ab + (a-b)\ ab + (a - b)\ ab + b^3$$

$$= (a-b)^3 + 3(a-b)\ ab + b^3 \qquad (1)$$

साथ ही, आकृति 4 में प्राप्त ठोस भुजा a वाला एक घन भी है।

अतः, इसका आयतन = a^3 (2)

(1) और (2) से,

$$(a-b)^3 + 3(a-b)\ ab + b^3 = a^3$$

या $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3\ (a-b)\ ab$

यहाँ, आयतन घन इकाई में है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ...., $a-b =$ ....,

अतः, $a^3 =$ ...., $ab =$ ....,

$b^3 =$ ...., $ab(a-b) =$ ....,

$3ab\,(a-b) =$ ...., $(a-b)^3 =$ ....,

अतः, $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ है।

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग निम्नलिखित के लिए किया जा सकता है–

1. दो सुविधाजनक संख्याओं के अंतर के रूप में व्यक्त किसी संख्या का घन परिकलित करना।
2. बीजीय व्यंजकों का सरलीकरण और गुणनखंडन करना।

टिप्पणी

इस सर्वसमिका को $(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 9

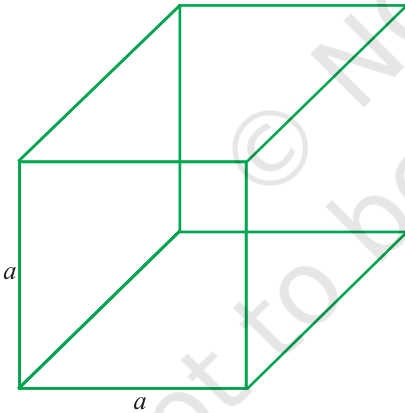
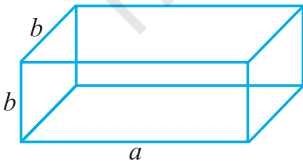
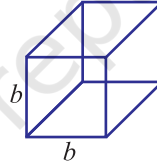
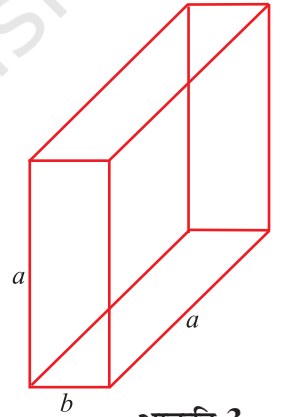
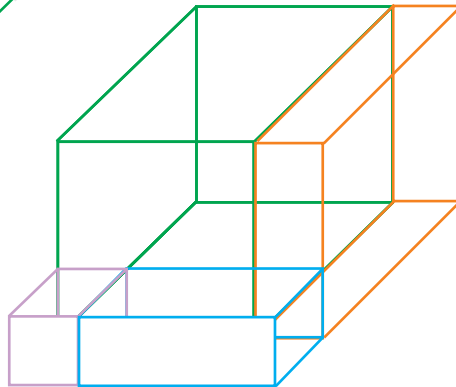
उद्देश्य

बीजीय सर्वसमिका $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

एक्रिलिक शीट, चिकना काग़ज़, आरी, गोंद, सेलोटेप, रंगीन काग़ज़, स्कैच पेन।

रचना की विधि

1. एक्रिलिक शीट और सेलोटेप / गोंद का प्रयोग करते हुए, भुजा a इकाई का एक घन बनाइए तथा भुजा b इकाई का एक अन्य घन बनाइए, जैसा कि आकृतियों 1 और 2 में दर्शाया गया है।
2. विमाओं $a \times a \times b$ का एक घनाभ बनाइए (देखिए आकृति 3)।
3. विमाओं $a \times b \times b$ का एक घनाभ बनाइए (देखिए आकृति 4)।

आकृति 1

आकृति 2

आकृति 3

आकृति 4

आकृति 5

4. इन घनों और घनाभों को आकृति 5 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

आकृति 6

प्रदर्शन

आकृति 1 में घन का आयतन = a^3

आकृति 2 में घन का आयतन = b^3

आकृति 3 में घनाभ का आयतन = a^2b

आकृति 4 में घनाभ का आयतन = ab^2

आकृति 5 में प्राप्त ठोस का आयतन

= $a^3+b^3 + a^2b + ab^2$

= $(a+b)\ (a^2 + b^2)$

आकृति 5 में प्राप्त ठोस में से आयतनों a^2b और ab^2 वाले घनाभों को हटाने पर, अर्थात $ab(a+b)$ को हटाने पर, हमें आकृति 6 में दर्शाया ठोस प्राप्त होता है।

आकृति 6 में प्राप्त ठोस का आयतन = $a^3 + b^3$

अतः $a^3 + b^3 = (a+b)\ (a^2 + b^2) - ab\ (a + b)$

$= (a+b)\ (a^2 + b^2 - ab)$

यहाँ, आयतन घन इकाई में है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

a = ..., b = ...,

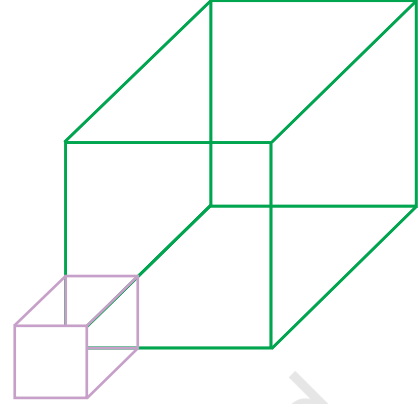
अतः, a^3 = ..., b^3 = ..., $(a+b)$ = ..., $(a+b)a^2$ = ...,

$(a+b)\ b^2$ = ..., a^2b = ..., ab^2 = ...,

$ab\ (a+b)$ = ...,

अतः, $a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 + b^2 - ab)$

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग बीजीय व्यंजकों के गुणन और गुणनखंडन में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 10

उद्देश्य

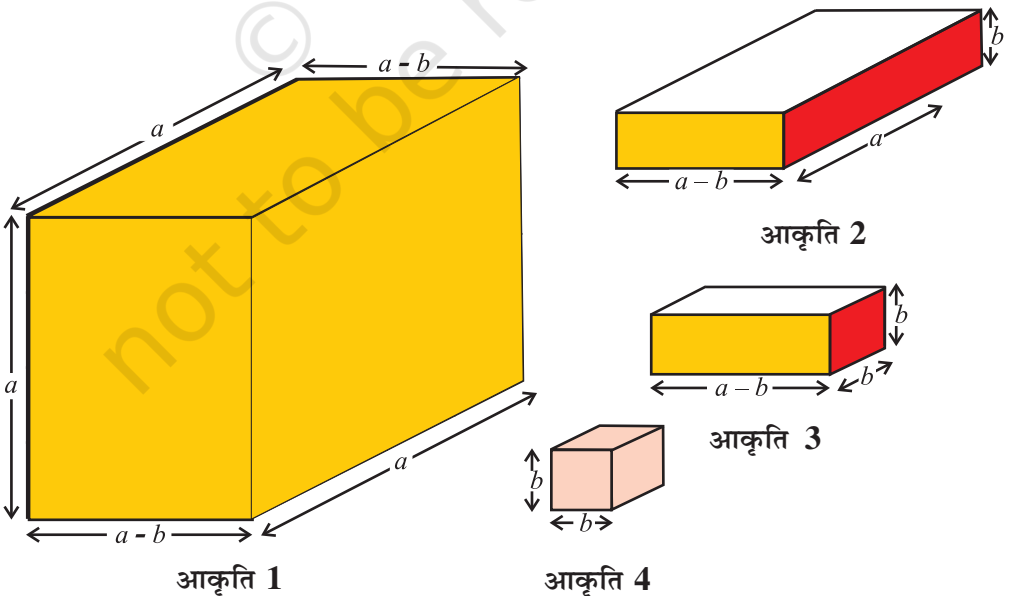
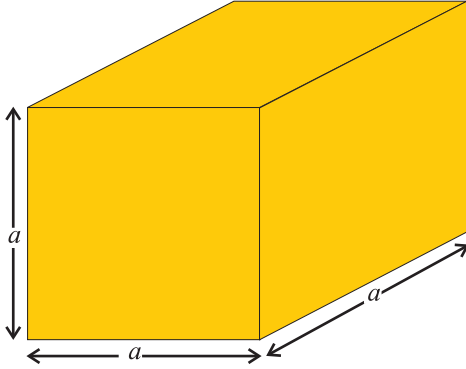
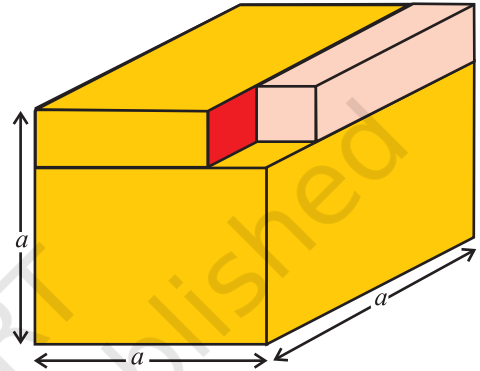
बीजीय सर्वसमिका $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

एक्रिलिक शीट, चिकना काग़ज़, कैंची, गोंद, सेलोटेप, रंगीन काग़ज़, कटर, स्कैच पेन।

रचना की विधि

1. एक्रिलिक शीट और गोंद/सेलोटेप का प्रयोग करते हुए विमाओं $(a-b) \times a \times a$ $(b < a)$ वाला एक घनाभ बनाइए जैसा आकृति 1 में दर्शाया गया है।
2. एक्रिलिक शीट और गोंद/सेलोटेप का प्रयोग करते हुए, विमाओं $(a-b) \times a \times b$ वाला एक अन्य घनाभ बनाइए, जैसा आकृति 2 में दर्शाया गया है।
3. एक अन्य घनाभ विमाओं $(a-b) \times b \times b$ वाला बनाइए, जैसा आकृति 3 में दर्शाया गया है।
4. एक्रिलिक शीट और गोंद/सेलोटेप का प्रयोग करते हुए, विमाओं $b \times b \times b$ का एक घन बनाइए, जैसा आकृति 4 में दर्शाया गया है।

आकृति 1 आकृति 2 आकृति 3 आकृति 4

5. ऊपर चरणों 1,2, 3 और 4 में बनाए गए घनों और घनाभों को आकृति 5 में दर्शाए गए ठोस प्राप्त करने के लिए व्यवस्थित कीजिए। यह ठोस आयतन a^3 घन इकाई वाला एक घन है।

आकृति 5

आकृति 6

प्रदर्शन

आकृति 1 में घनाभ का आयतन $= (a–b) \times a \times a$ घन इकाई

आकृति 2 में घनाभ का आयतन $= (a–b) \times a \times b$ घन इकाई

आकृति 3 में घनाभ का आयतन $= (a–b) \times b \times b$ घन इकाई

आकृति 4 में घन का आयतन $= b^3$ घन इकाई

आकृति 5 में घन का आयतन $= a^3$ घन इकाई

आकृति 5 के ठोस में से b^3 घन इकाई वाले एक घन को हटाने पर, हमें आकृति 6 में दर्शाया ठोस प्राप्त होता है।

आकृति 6 में ठोस का आयतन $= (a–b)\ a^2 + (a–b)\ ab + (a–b)\ b^2$

$$= (a–b)\ (a^2 + ab + b^2)$$

अत:, $$a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$$

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a = \ldots\ldots\ldots\ldots.,\quad b = \ldots\ldots\ldots\ldots.,$

अतः, $a^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots., b^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots.,\quad (a–b) = \ldots\ldots\ldots\ldots.,\quad ab = \ldots\ldots\ldots\ldots.,$

$a^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots., b^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots.$

अतः, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग बीजीय व्यंजकों के सरलीकरण और गुणनखंडन करने में किया जा सकता है।